



«If you can't stand algebra,  
keep out of evolutionary biology»

John Maynard Smith (1920-2004)



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH



BGSMath  
BARCELONA GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS

# RECONSTRUINT L'EVOLUCIÓ AMB MATEMÀTIQUES

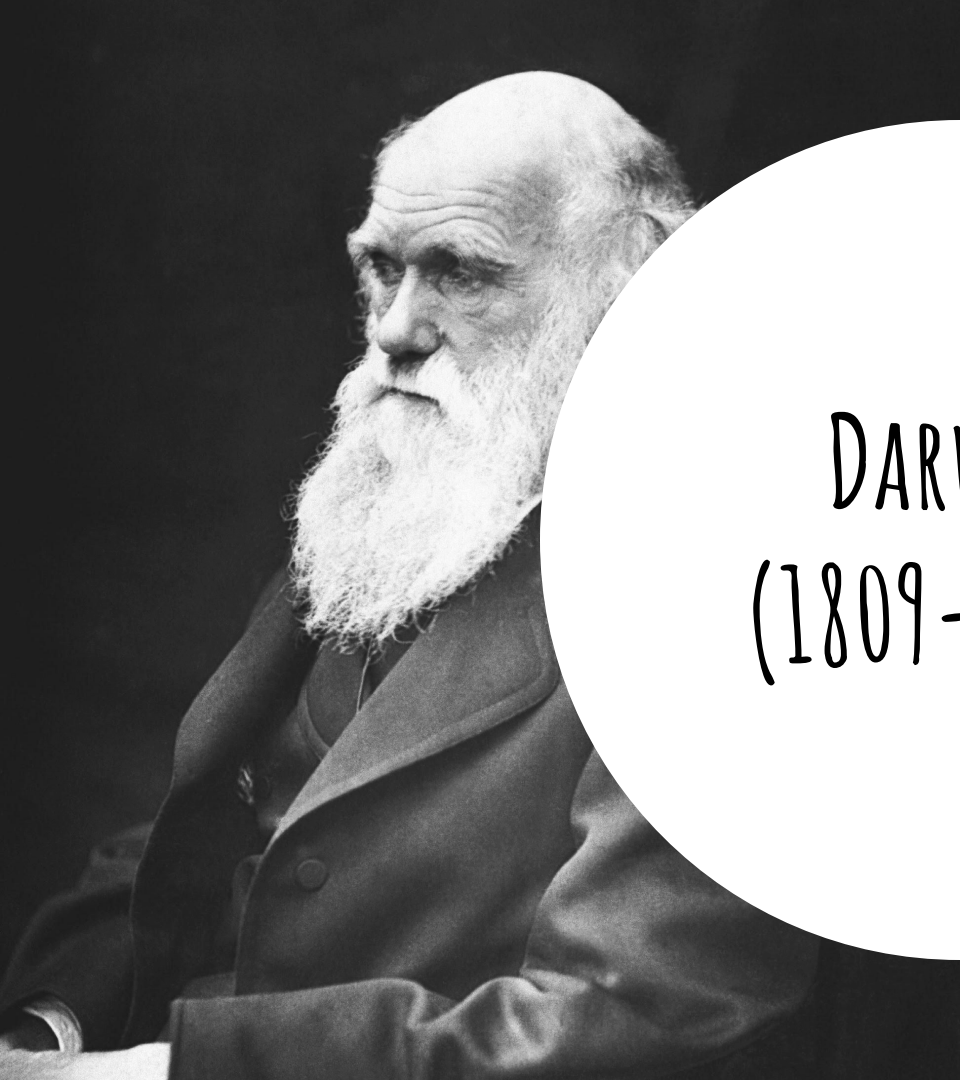
DIA INTERNACIONAL DE LA DONA I DE LA NENA EN LA CIÈNCIA

14 FEBRER 2019

MARTA CASANELLAS

MARINA GARROTE-LÓPEZ

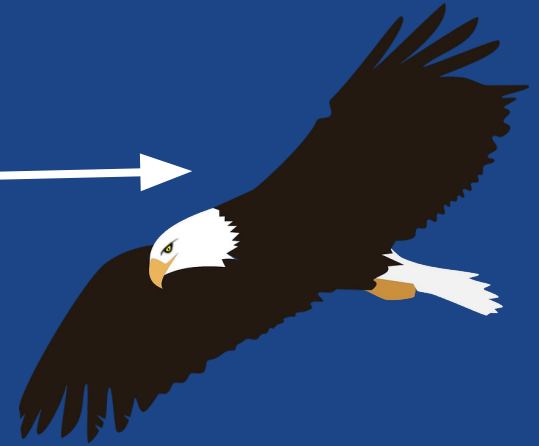
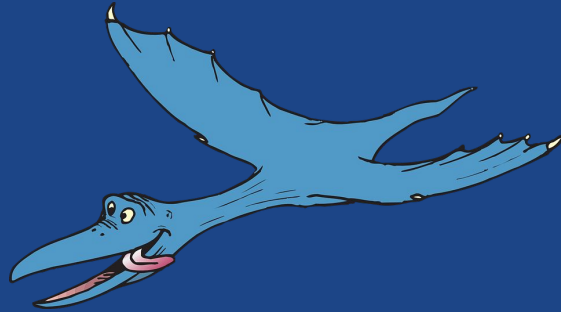
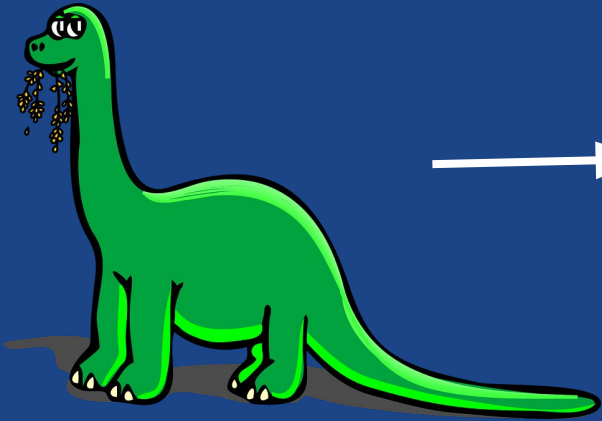
ALESSANDRO ONETO



DARWIN  
(1809-1882)



# MUTACIONES



# A QUINA FULLA DE L'ARBRE POSARÍEU EL RATPENAT, L'ABELLA I L'HUMÀ?



# MÈTODE: MÀXIM DE PARSIMÒNIA

BUSQUEM L' ARBRE ON ES PUGUIN PRODUIR EL MÍNIM NOMBRE DE CANVIS MORFOLÒGICS.

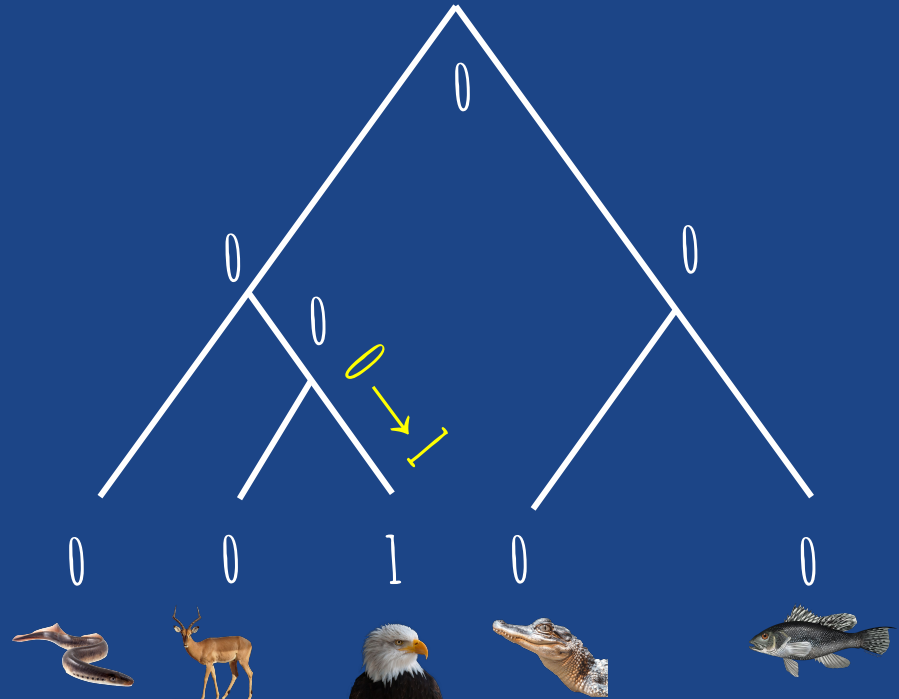
COM COMPTEM EL NÚMERO DE CANVIS?



1



0

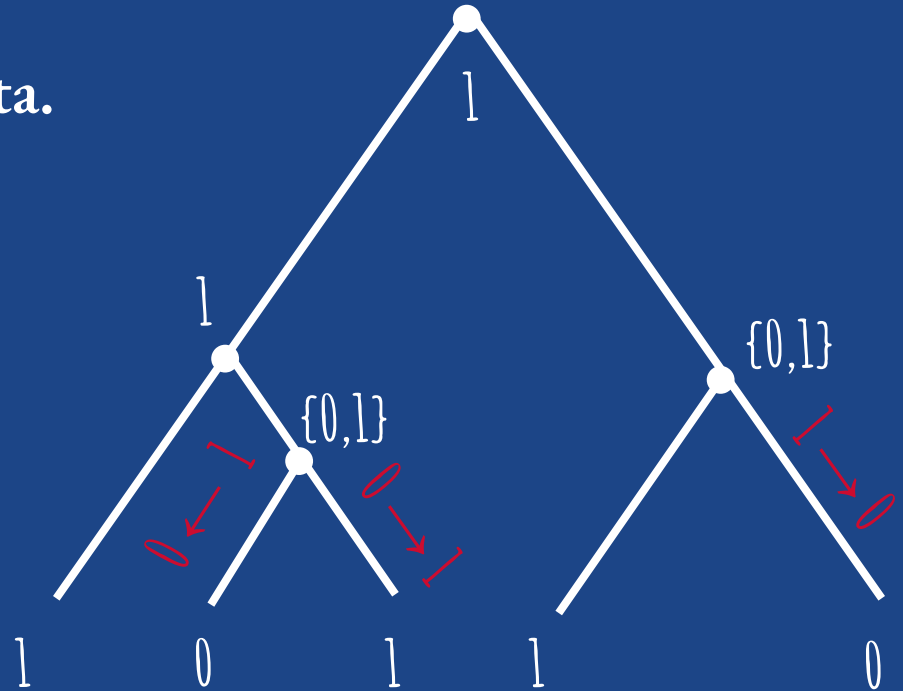




# ALGORITME

$$\text{Canvis} = \mathbf{1} + 1$$

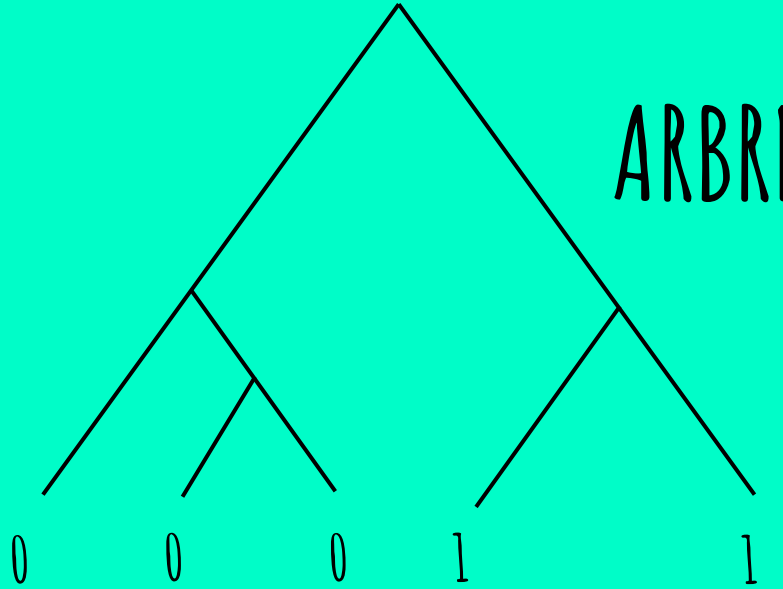
1. Recorrem vèrtexs interiors:  
de baix a dalt i d'esquerra a dreta.
2. Si no tenen un mateix valor als  
vèrtexs fills, posem la unió i  
sumem 1 al número de canvis.
3. Si els dos fills tenen un mateix  
valor, el posem.
4. Puntuació de l'arbre:  
el nombre de canvis final



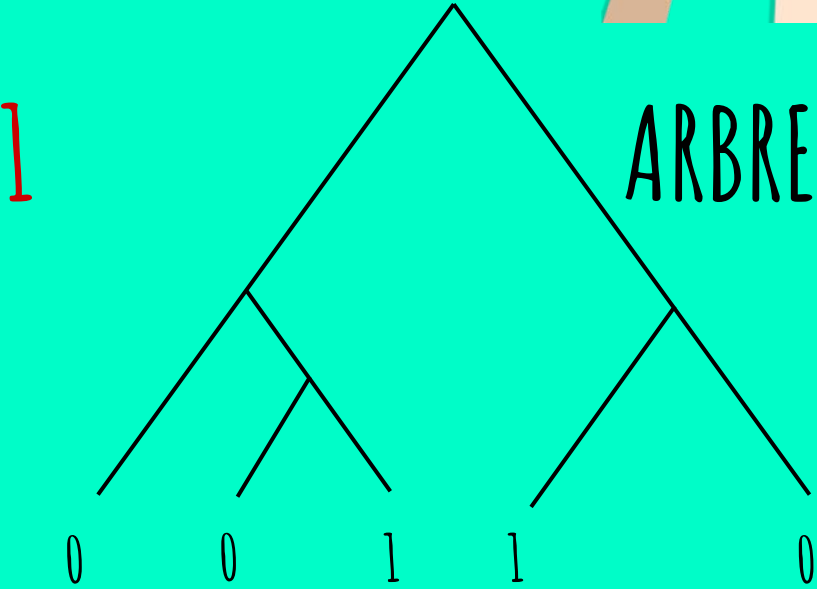
# QUINA ÉS LA PUNTUACIÓ DELS ARBRES SEGÜENTS?



ARBRE 1



ARBRE 2



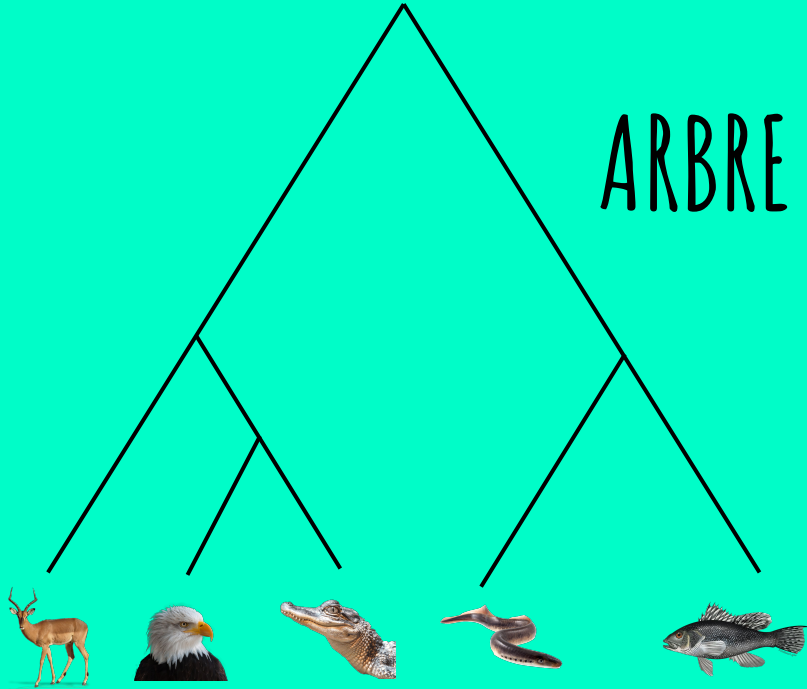


| <p>ESPECIES<br/>CARACTERÍSTICA</p> | <p>LLAMPREA</p>  | <p>ANTÍLOP</p>  | <p>ÀGUILA DE<br/>CAP BLANC</p>  | <p>COCODRIL</p>  | <p>LLOBARRO</p>  |
|------------------------------------|---|--|---|---|---|
| <p>PULMONS</p>                     | 0   | 1  | 1   | 1   | 0   |
| <p>PLOMES</p>                      | 0   | 0  | 1   | 0   | 0   |
| <p>PÈL</p>                         | 0   | 1  | 0   | 0   | 0   |

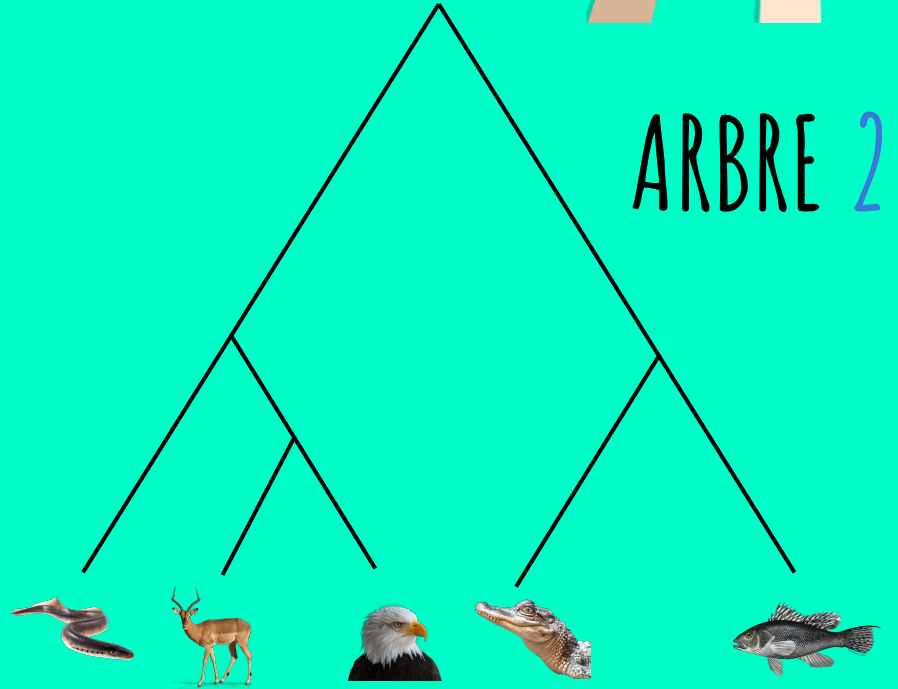
# QUIN ARBRE TÉ UNA PUNTUACIÓ MÉS BAIXA?



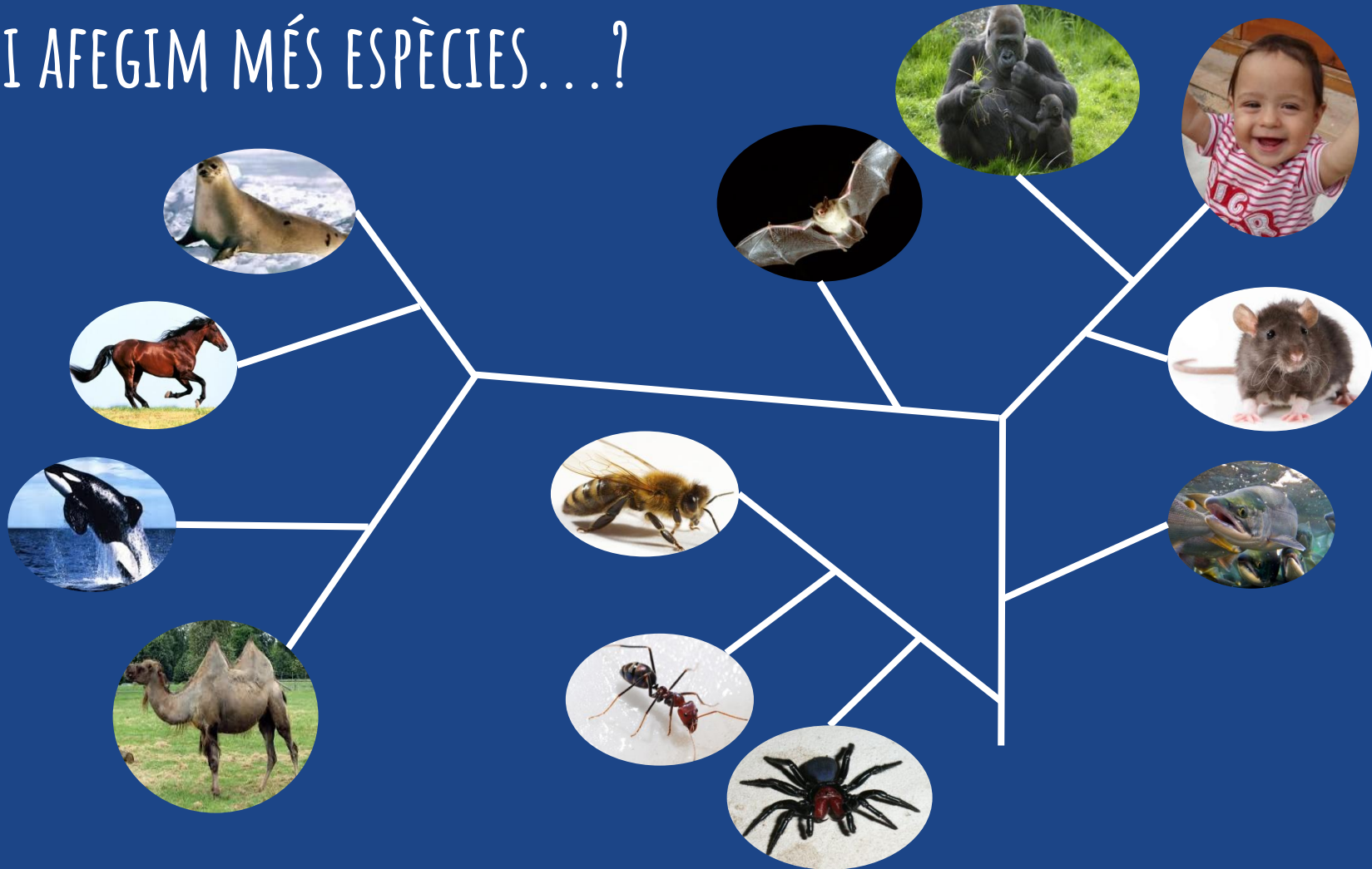
## ARBRE 1



## ARBRE 2



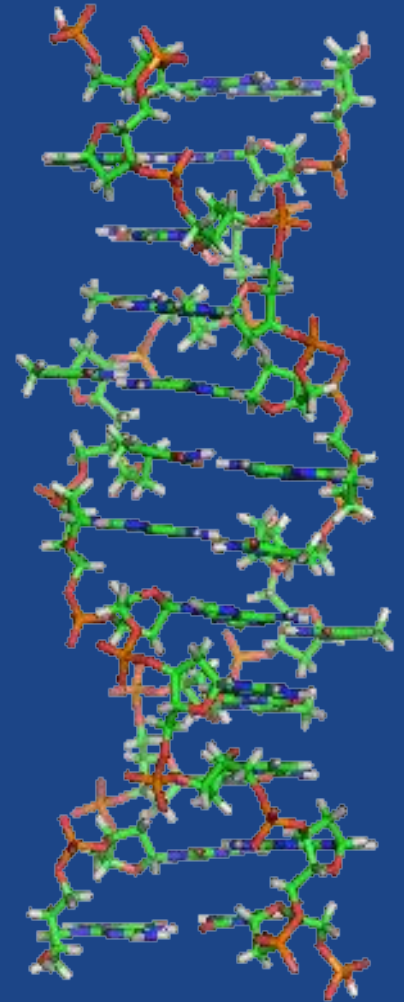
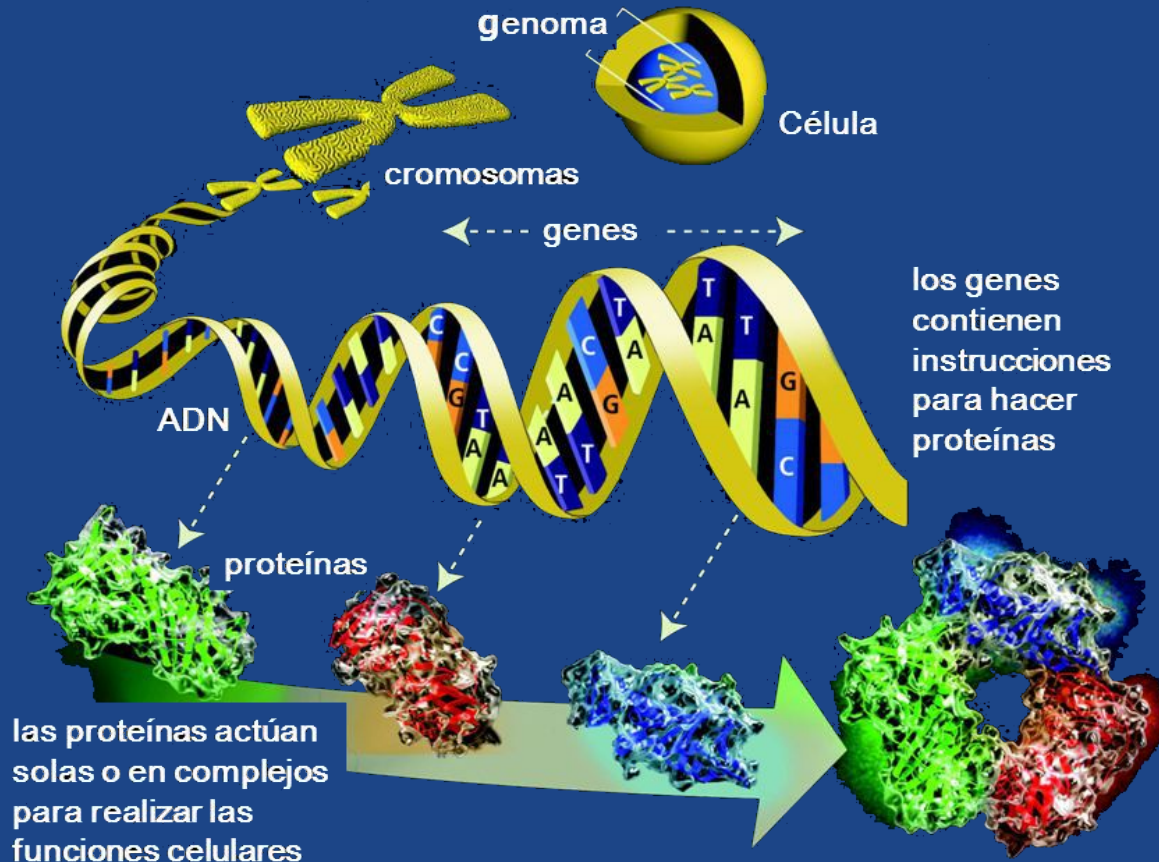
# I SI AFEGIM MÉS ESPÈCIES...?



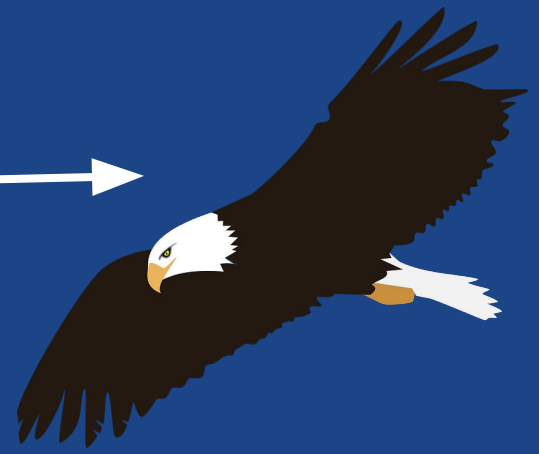
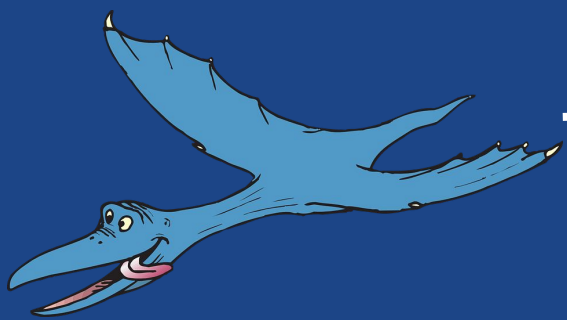
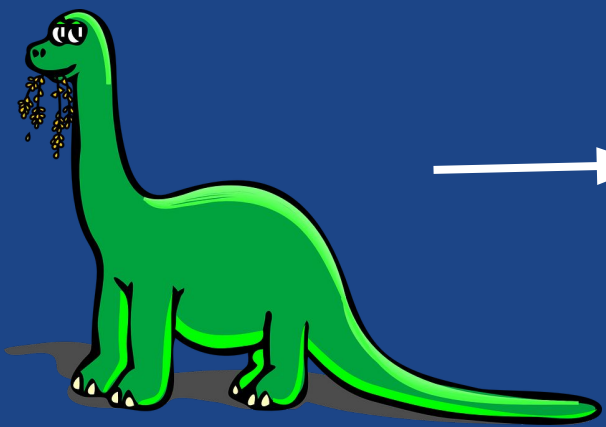
O AGAFEM ESPÈCIES MOLT SIMILARS...?



# ACTUALMENT S'USA EL GENOMA



# MUTACIONES



GATA



CATA



TATA

# OBJECTIU: RECONSTRUCCIÓ FILOGENÈTICA

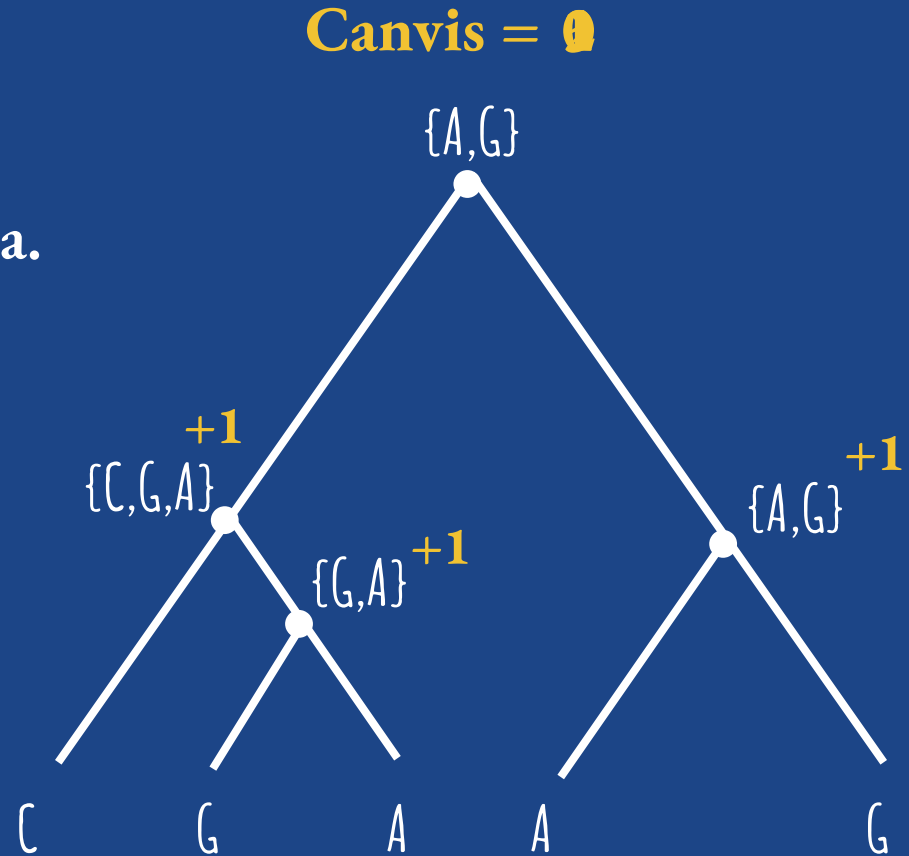


L'INPUT ÉS SEQÜÈNCIES D'ADN

|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| A   | A   | A   | A   |
| A   | C   | A   | A   |
| C   | C   | G   | C   |
| T   | T   | G   | G   |
| T   | T   | T   | T   |
| C   | A   | C   | C   |
| G   | T   | G   | T   |

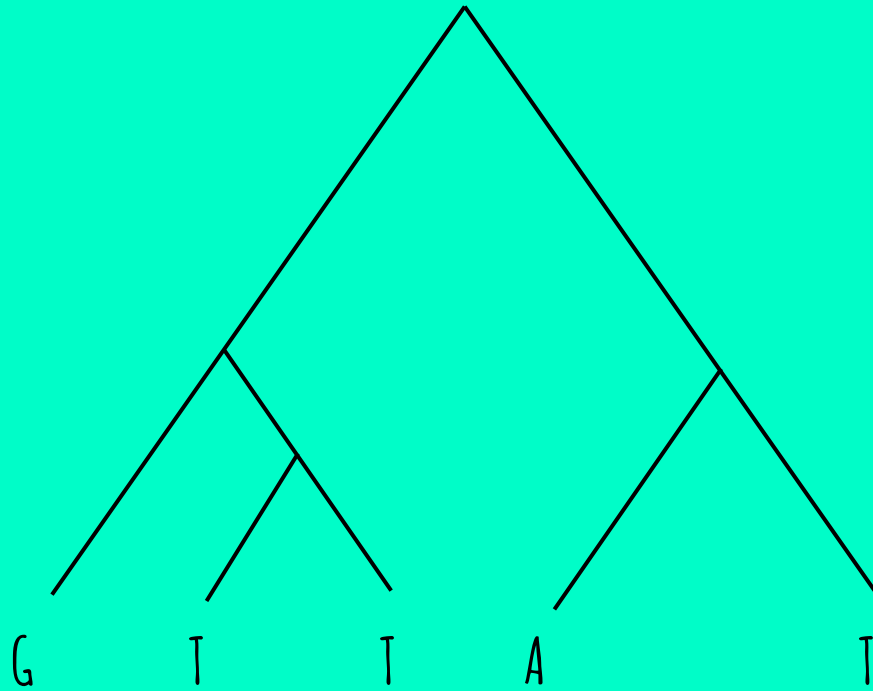
# ALGORITME

1. Recorrem vèrtexs interiors:  
de baix a dalt i d'esquerra a dreta.
2. Si no tenen un mateix valor als  
vèrtexs fills, posem la unió i  
sumem 1 al número de canvis.
3. Si els dos fills tenen valors  
repetits, els posem.
4. Puntuació de l'arbre:  
el nombre de canvis final



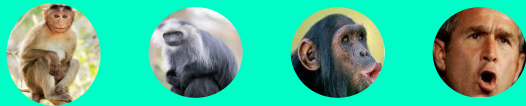


# QUINA ÉS LA PUNTUACIÓ D'AQUEST ARBRE?

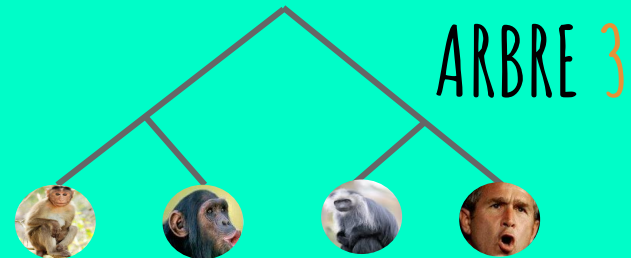
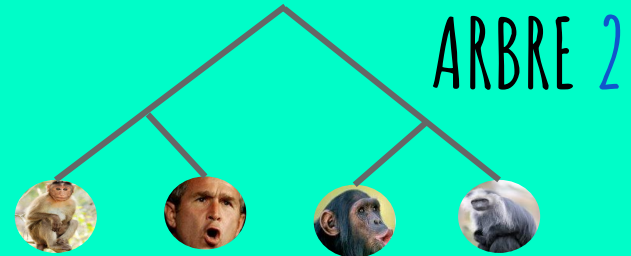
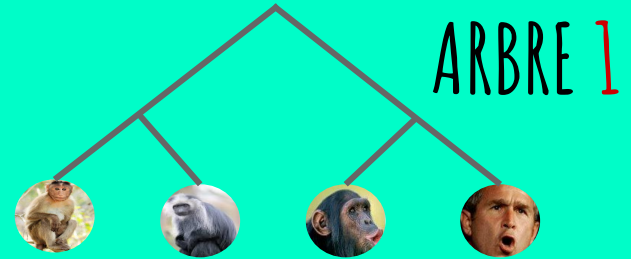


# RECONSTRUIU L'ARBRE

QUIN ARBRE TÉ UNA PUNTUACIÓ MÉS BAIXA A PARTIR D'AQUESTA ALINEACIÓ DE SEQÜÈNCIES D'ADN?



|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| A | A | A | T |
| A | C | A | A |
| C | C | C | C |
| T | T | G | G |



# RESUM

1. Llistem tots els arbres possibles
2. Calculem el número de caràcters
3. Escollim l'arbre amb el m

**Però, en general,  
quants arbres tenim...?**



| NÚMERO DE FULLES | POSSIBLES ARBRES   |
|------------------|--|
| 3                | 1  |
| 4                | 2  |
| 5                | 4  |
| 6                | 8  |
| 7                | 16   |
| 8                | 32   |
| 9                | 64   |
| 10               | 128  |
| 11               | 256  |
| 12               | 512  |
| 13               | 1024   |
| 14               | 2048   |
| 15               | 4096   |
| 16               | 8192   |
| 17               | 16384  |
| 18               | 32768  |
| 19               | 65536  |
| 20               | 131072   |
| 21               | 262144   |
| 22               | 524288   |
| 23               | 1048576  |
| 24               | 2097152  |
| 25               | 4194304  |
| 26               | 8388608  |
| 27               | 16777216   |
| 28               | 33554432   |
| 29               | 67108864   |
| 30               | 134217728  |
| 31               | 268435456  |
| 32               | 536870912  |
| 33               | 1073741824   |
| 34               | 2147483648   |
| 35               | 4294967296   |
| 36               | 8589934592   |
| 37               | 17179869184  |
| 38               | 34359738368  |
| 39               | 68719476736  |
| 40               | 137438953472   |
| 41               | 274877906944   |
| 42               | 549755813888   |
| 43               | 1099511627776  |
| 44               | 2199023255552  |
| 45               | 4398046511104  |
| 46               | 8796093022208  |
| 47               | 17592186044416   |
| 48               | 35184372088832   |
| 49               | 70368744177664   |
| 50               | 140737488355328  |
| 51               | 281474976710656  |
| 52               | 562949953421312  |
| 53               | 1125899906842624   |
| 54               | 2251799813685248   |
| 55               | 4503599627370496   |
| 56               | 9007199254740992   |
| 57               | 18014398509481984  |
| 58               | 36028797018963968  |
| 59               | 72057594037927936  |
| 60               | 144115188075855872   |
| 61               | 288230376151711744   |
| 62               | 576460752303423488   |
| 63               | 1152921504606846976  |
| 64               | 2305843009213693952  |
| 65               | 4611686018427387904  |
| 66               | 9223372036854775808  |
| 67               | 18446744073709551616   |
| 68               | 36893488147419103232   |
| 69               | 73786976294838206464   |
| 70               | 147573952589676412928  |
| 71               | 295147905179352825856  |
| 72               | 590295810358705651712  |
| 73               | 1180591620717411303424                                       |
| 74               | 2361183241434822606848                                       |
| 75               | 4722366482869645213696                                       |
| 76               | 9444732965739290427392                                       |
| 77               | 18889465931478580854784                                      |
| 78               | 37778931862957161709568                                      |
| 79               | 75557863725914323419136                                      |
| 80               | 151115727451828646838272                                     |
| 81               | 302231454903657293676544                                     |
| 82               | 604462909807314587353088                                     |
| 83               | 1208925819614629174706176                                    |
| 84               | 2417851639229258349412352                                    |
| 85               | 4835703278458516698824704                                    |
| 86               | 9671406556917033397649408                                    |
| 87               | 19342813113834066795298816                                   |
| 88               | 38685626227668133590597632                                   |
| 89               | 77371252455336267181195264                                   |
| 90               | 154742504910672534362390528                                  |
| 91               | 309485009821345068724781056                                  |
| 92               | 618970019642690137449562112                                  |
| 93               | 1237940039285380274899124224                                 |
| 94               | 2475880078570760549798248448                                 |
| 95               | 4951760157141521099596496896                                 |
| 96               | 9903520314283042199192993792                                 |
| 97               | 19807040628566084398385987584                                |
| 98               | 39614081257132168796771975168                                |
| 99               | 79228162514264337593543950336                                |
| 100              | 158456325028528675187087900672                               |
| 101              | 316912650057057350374175801344                               |
| 102              | 633825300114114700748351602688                               |
| 103              | 1267650600228229401496703205376                              |
| 104              | 2535301200456458802993406410752                              |
| 105              | 5070602400912917605986812821504                              |
| 106              | 10141204801825835211973625643008                             |
| 107              | 20282409603651670423947251286016                             |
| 108              | 40564819207303340847894502572032                             |
| 109              | 81129638414606681695789005144064                             |
| 110              | 162259276829213363391578010288128                            |
| 111              | 324518553658426726783156020576256                            |
| 112              | 649037107316853453566312041152512                            |
| 113              | 1298074214633706907132624082305024                           |
| 114              | 2596148429267413814265248164610048                           |
| 115              | 5192296858534827628530496329220096                           |
| 116              | 10384593717069655257060992658440192                          |
| 117              | 20769187434139310514121985316880384                          |
| 118              | 41538374868278621028243970633760768                          |
| 119              | 83076749736557242056487941267521536                          |
| 120              | 166153499473114484112975882535043072                         |
| 121              | 332306998946228968225951765070086144                         |
| 122              | 664613997892457936451903530140172288                         |
| 123              | 1329227995784915872903807060280344576                        |
| 124              | 2658455991569831745807614120560689152                        |
| 125              | 5316911983139663491615228241121378304                        |
| 126              | 10633823966279326983230456482242756608                       |
| 127              | 21267647932558653966460912964485513216                       |
| 128              | 42535295865117307932921825928971026432                       |
| 129              | 85070591730234615865843651857942052864                       |
| 130              | 170141183460469231731687303715884105728                      |
| 131              | 340282366920938463463374607431768211456                      |
| 132              | 680564733841876926926749214863536422912                      |
| 133              | 1361129467683753853853498429727072845824                     |
| 134              | 2722258935367507707706996859454145691648                     |
| 135              | 5444517870735015415413993718908291383296                     |
| 136              | 10889035741470030830827987437816582766592                    |
| 137              | 21778071482940061661655974875633165533184                    |
| 138              | 43556142965880123323311949751266331066368                    |
| 139              | 87112285931760246646623899502532662132736                    |
| 140              | 174224571863520493293247799005065324265472                   |
| 141              | 348449143727040986586495598010130648530944                   |
| 142              | 696898287454081973172991196020261297061888                   |
| 143              | 1393796574908163946345982392040522594123776                  |
| 144              | 2787593149816327892691964784081045188247552                  |
| 145              | 5575186299632655785383929568162090376495104                  |
| 146              | 11150372599265311570767859136324180752990208                 |
| 147              | 22300745198530623141535718272648361505980416                 |
| 148              | 44601490397061246283071436545296723011960832                 |
| 149              | 89202980794122492566142873090593446023921664                 |
| 150              | 178405961588244985132285746181186892047843328                |
| 151              | 356811923176489970264571492362373784095686656                |
| 152              | 713623846352979940529142984724747568191373312                |
| 153              | 1427247692705959881058285969449495136382746624               |
| 154              | 2854495385411919762116571938898990272765493248               |
| 155              | 5708990770823839524233143877797980545530986496               |
| 156              | 11417981541647679048466287755595961091061972992              |
| 157              | 22835963083295358096932575511191922182123945984              |
| 158              | 45671926166590716193865151022383844364247891968              |
| 159              | 91343852333181432387730302044767688728495783936              |
| 160              | 182687704666362864775460604089535377456991567872             |
| 161              | 365375409332725729550921208179070754913983135744             |
| 162              | 730750818665451459101842416358141509827966271488             |
| 163              | 1461501637330902918203684832716283019655932542976            |
| 164              | 2923003274661805836407369665432566039311865085952            |
| 165              | 5846006549323611672814739330865132078623730171904            |
| 166              | 11692013098647223345629478661730264157247460343808           |
| 167              | 23384026197294446691258957323460528314494920687616           |
| 168              | 46768052394588893382517914646921056628989841375232           |
| 169              | 93536104789177786765035829293842113257979682750464           |
| 170              | 187072209578355573530071658587684226515959365500928          |
| 171              | 374144419156711147060143317175368453031918731001856          |
| 172              | 748288838313422294120286634350736906063837462003712          |
| 173              | 1496577676626844588240573268701473812127674924007424         |
| 174              | 2993155353253689176481146537402947624255349848014848         |
| 175              | 5986310706507378352962293074805895248510699696029696         |
| 176              | 11972621413014756705924586149611790497021399392059392        |
| 177              | 23945242826029513411849172299223580994042798784118784        |
| 178              | 47890485652059026823698344598447161988085597568237568        |
| 179              | 95780971304118053647396689196894323976171195136475136        |
| 180              | 191561942608236107294793378393788647952342390272950272       |
| 181              | 383123885216472214589586756787577295904684780545900544       |
| 182              | 766247770432944429179173513575154591809369561091801088       |
| 183              | 1532495540865888858358347027150309183618739122183602176      |
| 184              | 3064991081731777716716694054300618367237478244367204352      |
| 185              | 6129982163463555433433388108601236734474956488734408704      |
| 186              | 12259964326927110866866776217202473468949912977468817408     |
| 187              | 24519928653854221733733552434404946937899825954937634816     |
| 188              | 49039857307708443467467104868809893875799651909875269632     |
| 189              | 98079714615416886934934209737619787751599303819750539264     |
| 190              | 196159429230833773869868419475239575503198607639501078528    |
| 191              | 392318858461667547739736838950479151006397215279002157056    |
| 192              | 784637716923335095479473677900958302012794430558004314112    |
| 193              | 1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224   |
| 194              | 3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448   |
| 195              | 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896   |
| 196              | 12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792  |
| 197              | 25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584  |
| 198              | 50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168  |
| 199              | 100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336 |
| 200              | 200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672 |

| NÚMERO DE FULLES | POSSIBLES ARBRES     |
|------------------|----------------------|
| 20               | $2,22 \cdot 10^{20}$ |
| 30               |                      |
| 40               |                      |
| 50               |                      |
| 60               |                      |
| 70               |                      |
| 80               |                      |
| 90               |                      |
| 100              |                      |
| 110              |                      |
| 120              |                      |
| 130              |                      |
| 140              |                      |
| 150              |                      |
| 160              |                      |
| 170              |                      |
| 180              |                      |
| 190              |                      |
| 200              |                      |
| 210              |                      |
| 220              |                      |
| 230              |                      |
| 240              |                      |
| 250              |                      |
| 260              |                      |
| 270              |                      |
| 280              |                      |
| 290              |                      |
| 300              |                      |
| 310              |                      |
| 320              |                      |
| 330              |                      |
| 340              |                      |
| 350              |                      |
| 360              |                      |
| 370              |                      |
| 380              |                      |
| 390              |                      |
| 400              |                      |
| 410              |                      |
| 420              |                      |
| 430              |                      |
| 440              |                      |
| 450              |                      |
| 460              |                      |
| 470              |                      |
| 480              |                      |
| 490              |                      |
| 500              |                      |
| 510              |                      |
| 520              |                      |
| 530              |                      |
| 540              |                      |
| 550              |                      |
| 560              |                      |
| 570              |                      |
| 580              |                      |
| 590              |                      |
| 600              |                      |
| 610              |                      |
| 620              |                      |
| 630              |                      |
| 640              |                      |
| 650              |                      |
| 660              |                      |
| 670              |                      |
| 680              |                      |
| 690              |                      |
| 700              |                      |
| 710              |                      |
| 720              |                      |
| 730              |                      |
| 740              |                      |
| 750              |                      |
| 760              |                      |
| 770              |                      |
| 780              |                      |
| 790              |                      |
| 800              |                      |
| 810              |                      |
| 820              |                      |
| 830              |                      |
| 840              |                      |
| 850              |                      |
| 860              |                      |
| 870              |                      |
| 880              |                      |
| 890              |                      |
| 900              |                      |
| 910              |                      |
| 920              |                      |
| 930              |                      |
| 940              |                      |
| 950              |                      |
| 960              |                      |

MOLTES GRÀCIES!