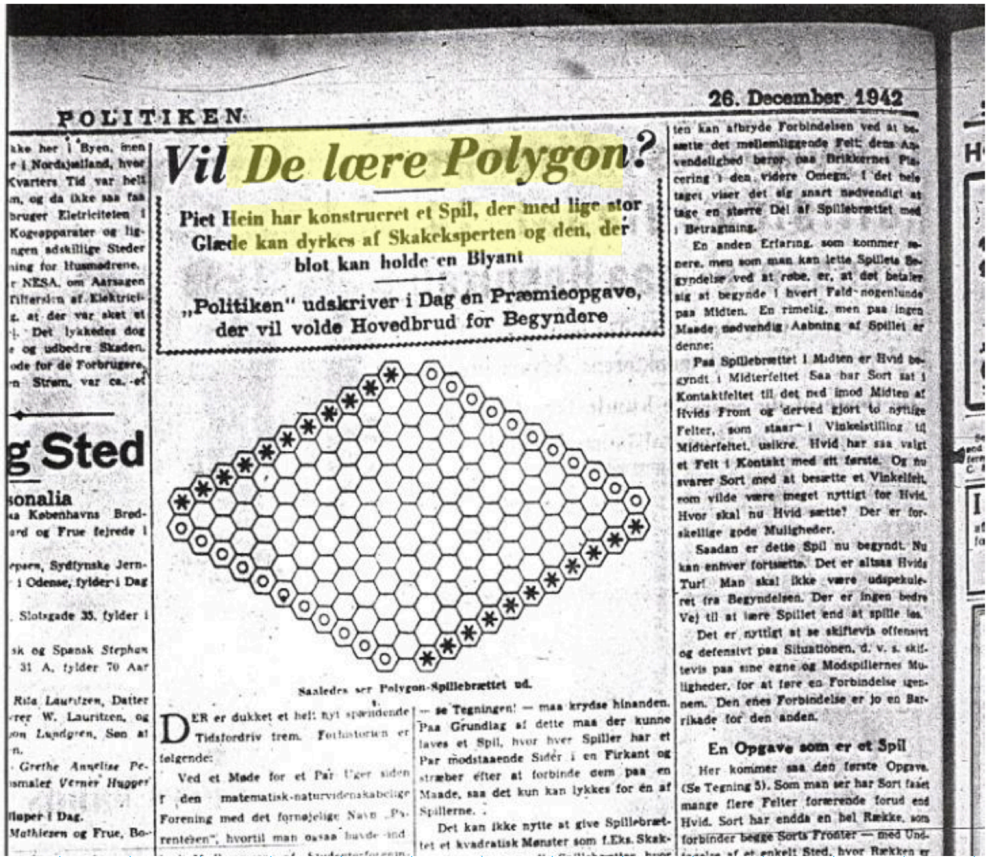
# HEX

## UNA LEZIONE DI TOPOLOGIA SU SCACCHIERA

# IL GIOCO DELL'HEX

1942 : Piet Hein
(Danimarca)



POLITIKEN

26. December 1942

## Vil De lære Polygon?

**Piet Hein har konstrueret et Spil, der med lige stor Glæde kan dyrkes af Skakeksperten og den, der blot kan holde en Blyant**

**„Politiken" udskriver i Dag en Præmieopgave, der vil volde Hovedbrud for Begyndere**

Saaledes ser Polygon-Spillebrættet ud.

DER er dukket et helt nyt spændende Tidsfordriv frem. Forhistorien er følgende:

Ved et Møde for et Par Uger siden i den matematisk-naturvidenskabelige Forening med det fornøjelige Navn „Parenteßen", hvortil man ogsaa havde ind

— se Tegningen! — maa krydse hinanden. Paa Grundlag af dette maa der kunne laves et Spil, hvor hver Spiller har et Par modstaaende Sider i en Firkant og stræber efter at forbinde dem paa en Maade, saa det kun kan lykkes for én af Spillerne.

Det kan ikke nytte at give Spillebrættet et kvadratisk Mønster som f.Eks. Skak-

ten kan afbryde Forbindelsen ved at besætte det mellemliggende Felt; dens Anvendelighed beror paa Brikkernes Placering i den videre Omegn. I det hele taget viser det sig snart nødvendigt at tage en større Del af Spillebrættet med i Betragtning.

En anden Erfaring, som kommer senere, men som man kan lette Spillets Begyndelse ved at røbe, er, at det betaler sig at begynde i hvert Fald nogenlunde paa Midten. En rimelig, men paa ingen Maade nødvendig Aabning af Spillet er denne:

Paa Spillebrættet i Midten er Hvid begyndt i Midterfeltet. Saa har Sort sat i Kontaktfeltet til det ned imod Midten af Hvids Front og derved gjort to nyttige Felter, som staar i Vinkelstilling til Midterfeltet, usikre. Hvid har saa valgt et Felt i Kontakt med sit første. Og nu svarer Sort med at besætte et Vinkelfelt, som vilde være meget nyttigt for Hvid. Hvor skal nu Hvid sætte? Der er forskellige gode Muligheder.

Saadan er dette Spil nu begyndt. Nu kan enhver fortsætte. Det er altsaa Hvids Tur! Man skal ikke være udspekuleret fra Begyndelsen. Der er ingen bedre Vej til at lære Spillet end at spille les.

Det er nyttigt at se skiftevis offensivt og defensivt paa Situationen, d. v. s. skiftevis paa sine egne og Modspillernes Muligheder, for at føre en Forbindelse igennem. Den enes Forbindelse er jo en Barrikade for den anden.

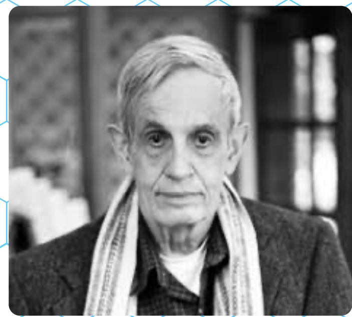
### En Opgave som er et Spil

Her kommer saa den første Opgave. (Se Tegning 5). Som man ser har Sort faaet mange flere Felter foræreende forud end Hvid. Sort har endda en hel Række, som forbinder begge Sorts Fronter — med Undtagelse af et enkelt Sted, hvor Rækken er

# IL GIOCO DELL'HEX

1942 : Piet Hein (Danimarca)

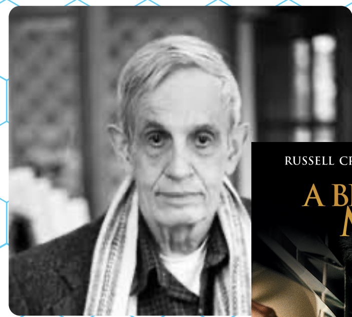
1948 : John Nash (USA)



# IL GIOCO DELL'HEX

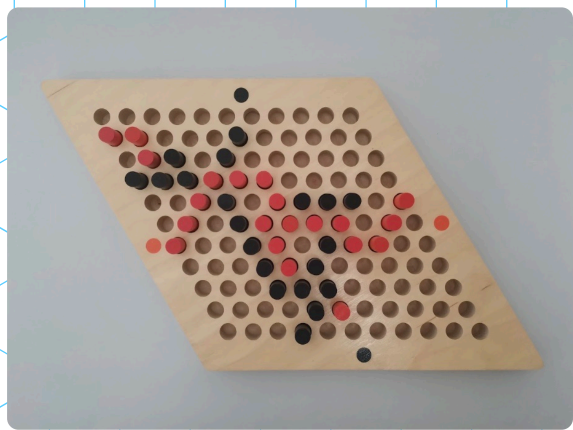
1942 : Piet Hein
(Danimarca)

1948 : John Nash
(USA)




# IL GIOCO DELL'HEX

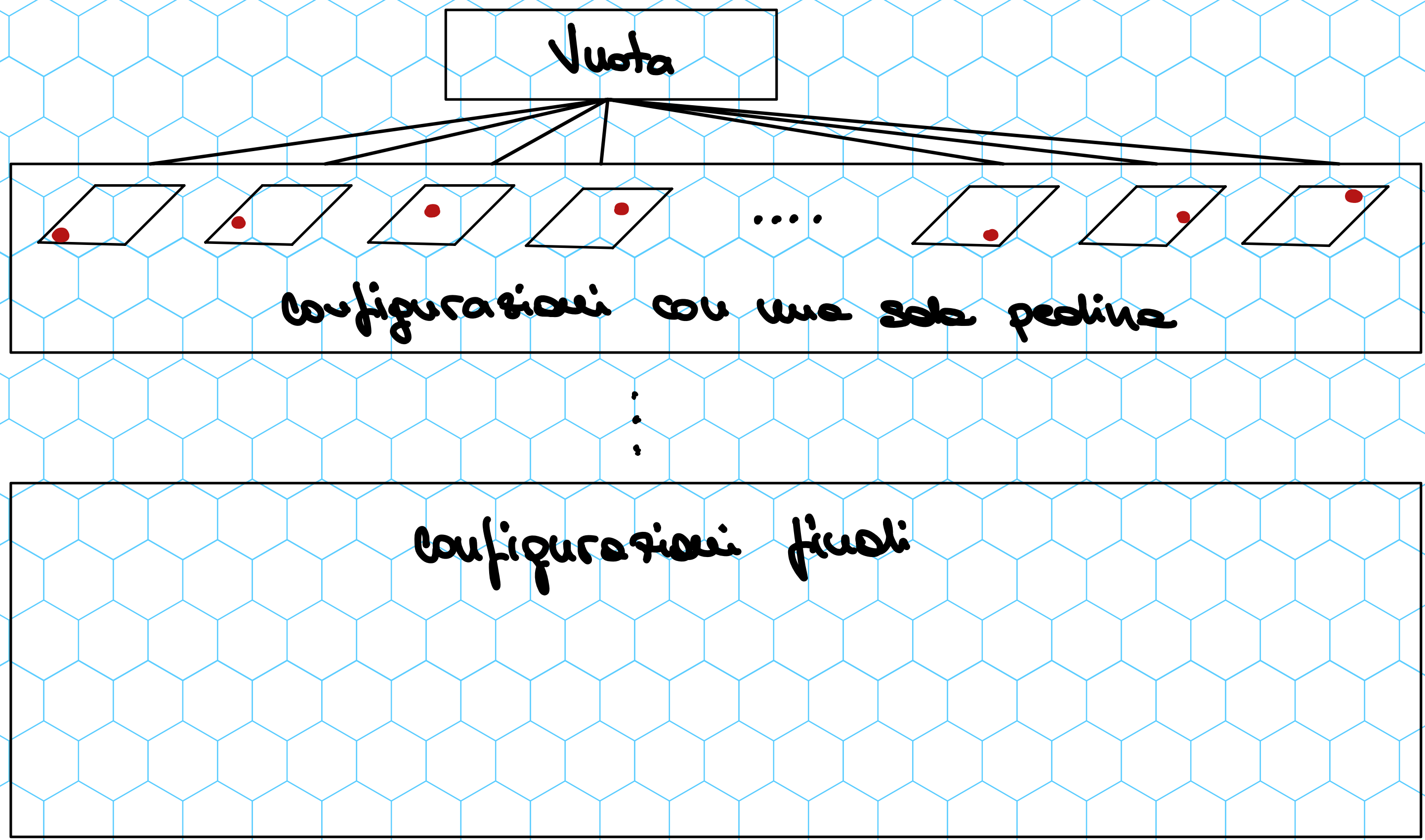
- si gioca su una scacchiera a forma di rombo con caselle esagonali
- due giocatori: Rosso e Nero
- ogni giocatore ha assegnate due sponde opposte
- a turno ogni giocatore dispone una propria pedina su una casella vuota
- lo scopo è quello di collegare le proprie sponde con un cammino di pedine adiacenti
- Vince chi ci riesce per primo!



# QUALCHE PRIMA DOMANDA

1. ESISTE UNA STRATEGIA VINCENTE?

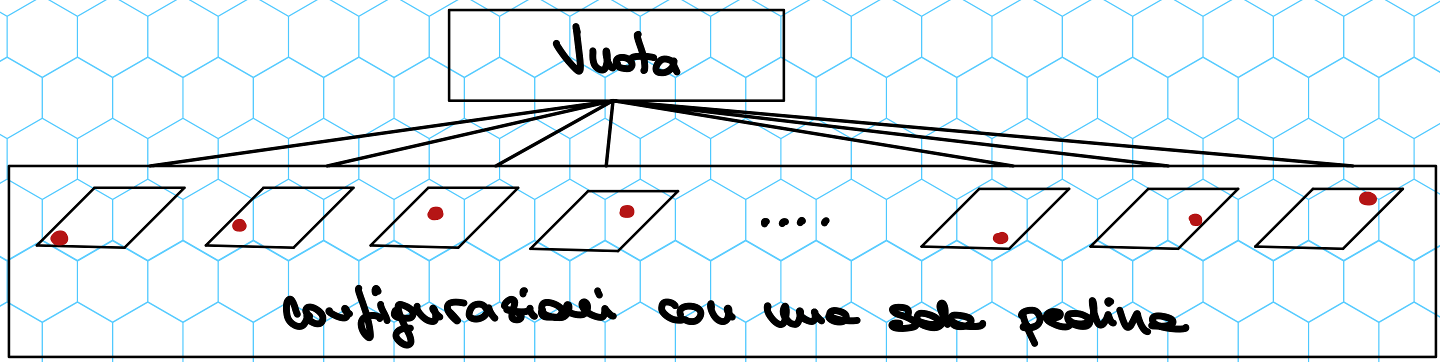
Consideriamo il "GRAFO" delle configurazioni della scacchiera



# QUALCHE PRIMA DOMANDA

## 1. ESISTE UNA STRATEGIA VINCENTE?

Consideriamo il "GRAFO" delle configurazioni della scacchiera




⋮

configurazioni finali:

vittoria del Rosso

vittoria del Nero

scacchiera piena, "patta" (?)

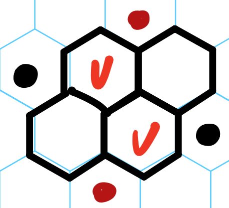
# QUALCHE PRIMA DOMANDA

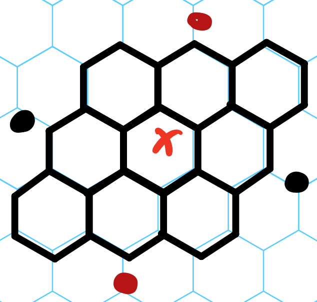
1. ESISTE UNA STRATEGIA VINCENTE?

→ HEX PUÒ FINIRE IN "PATTA"?

Cerchiamo di capire meglio il gioco in qualche esempio.

Provate a giocare sulla 2×2 o 3×3:
c'è una strategia vincente?
può il Rosso garantirsi la vittoria dalla prima mossa?



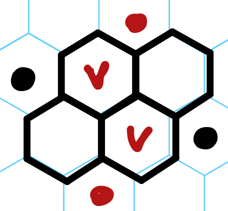
# QUALCHE PRIMA DOMANDA

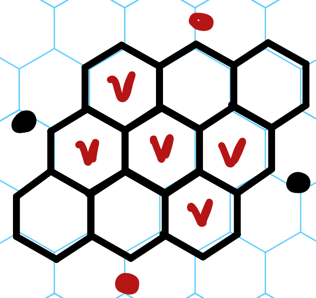
1. ESISTE UNA STRATEGIA VINCENTE?

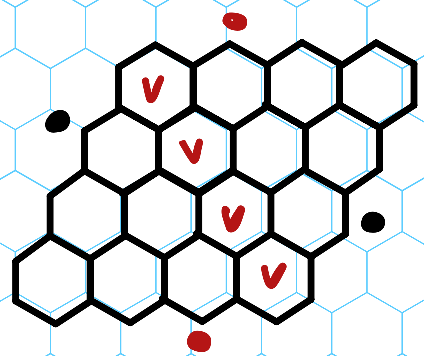
→ HEX PUÒ FINIRE IN "PATTA"?

Cerchiamo di capire meglio il gioco in qualche esempio.

Provate a giocare sulla 2×2 o 3×3:
c'è una strategia vincente?
può il Rosso garantirsi la vittoria dalla prima mossa?







# QUALCHE PRIMA DOMANDA

1. ESISTE UNA STRATEGIA VINCENTE?

→ HEX PUÒ FINIRE IN "PATTA"?

Cerchiamo di capire meglio il gioco in qualche esempio.

Magari è una caratteristica delle scacchiere piccole: proviamo a riempire completamente la scacchiera senza che nessuno vinca ... ci riusciamo?

# QUALCHE PRIMA DOMANDA

1. ESISTE UNA STRATEGIA VINCENTE?

→ HEX PUÒ FINIRE IN "PATTA"?

Cerchiamo di capire meglio il gioco in qualche esempio.

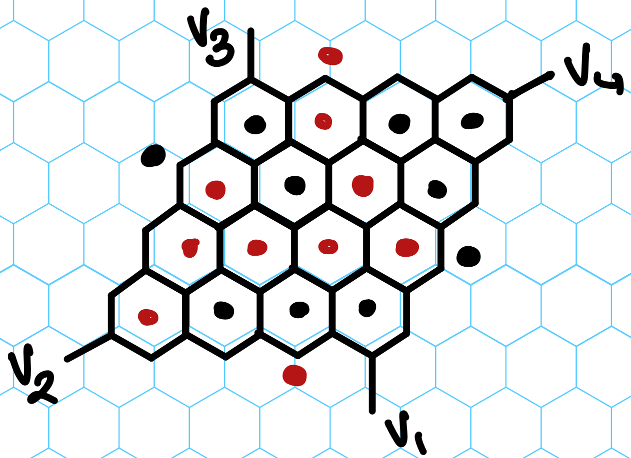
Magari è una caratteristica delle scacchiere piccole: proviamo a riempire completamente la scacchiera senza che nessuno vinca ... ci riusciamo?

Congettura. Hex non può finire mai in "patta" e il Rosso (il primo che inizia) ha una strategia vincente

# TEOREMA DELL'HEX

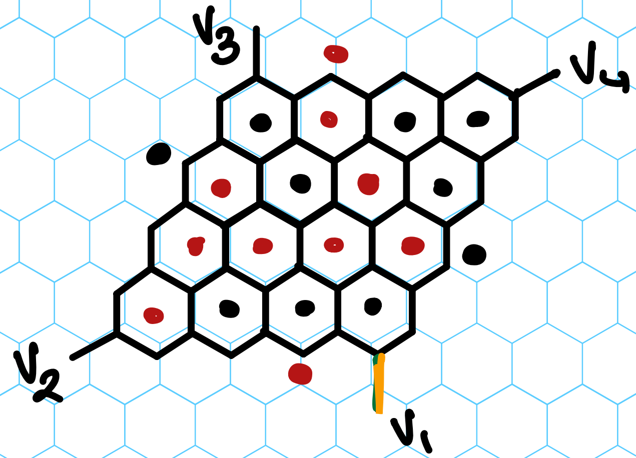
In qualunque modo vengono disposte pedine rosse e nere sulla scacchiera, esiste sempre un percorso vincente

dimostrazione.

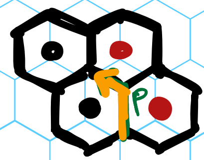


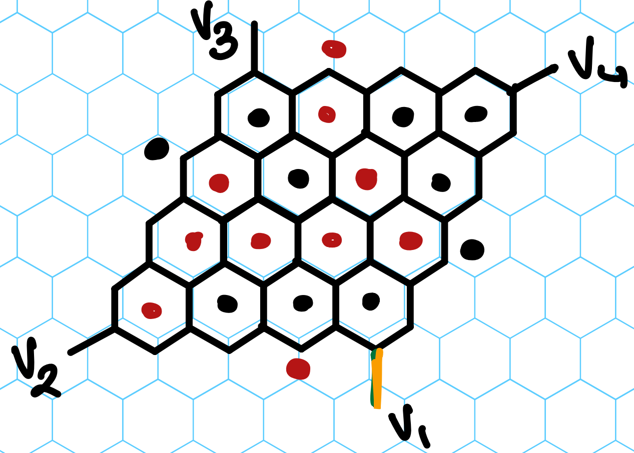

Immaginiamo di avere la scacchiera piena.
Costruiamo un cammino lungo i lati della scacchiera.

- partiamo da $V_1$

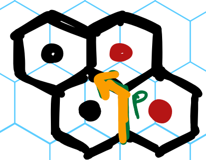


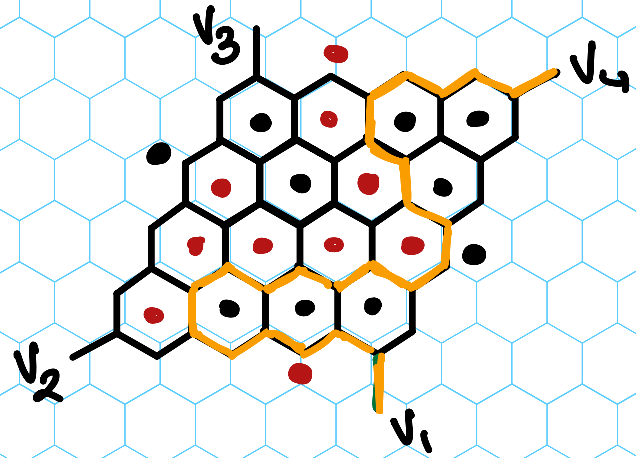
- partiamo da $V_1$
- supponiamo di essere arrivati a un vertice $P$ non toccato in precedenza:
    - se $P = V_2, V_3$ o $V_4$: ci fermiamo
    - altrimenti, prendiamo il lato che separa una casella Rossa e una Nera



- partiamo da $V_1$
- supponiamo di essere arrivati a un vertice $P$ non toccato in precedenza:
  - se $P = V_2, V_3$ o $V_4$ : ci fermiamo
  - altrimenti, prendiamo il lato che separa una casella Rossa e una Nera



Nell'esempio funziona,

ma in matematica quando si definisce qualcosa
bisogna farlo in modo non-ambiguo e
non-contraditorio!

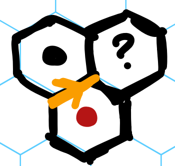
Vediamo che tale cammino è ben definito :

Nell'esempio funziona,

ma in matematica quando si dimostra qualcosa bisogna farlo in modo non-ambiguo e non-contraditorio!

Vediamo che tale cammino è ben definito:

(1) SIAMO SICURI CHE AD OGNI PASSO ABBIAMO SEMPRE UN LATO CHE SEPARA UNA CASELLA ROSSA E UNA NERA E UNO SOLO?



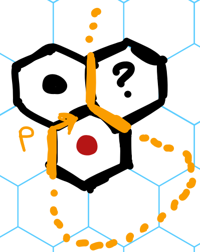
Nell'esempio funziona,
ma in matematica quando si dimostra qualcosa
bisogna farlo in modo non-ambiguo e
non-contraditorio!

Vediamo che tale cammino è ben definito:

(2) SIAMO SICURI DI NON TORNARE A UN VERTICE IN CUI NON SIAMO GIÀ PASSATI?

Supponiamo di aver fatto un po' di cammino
senza ripetere vertici, ma che il prossimo
passaggio ci porta a un vertice già percorso.

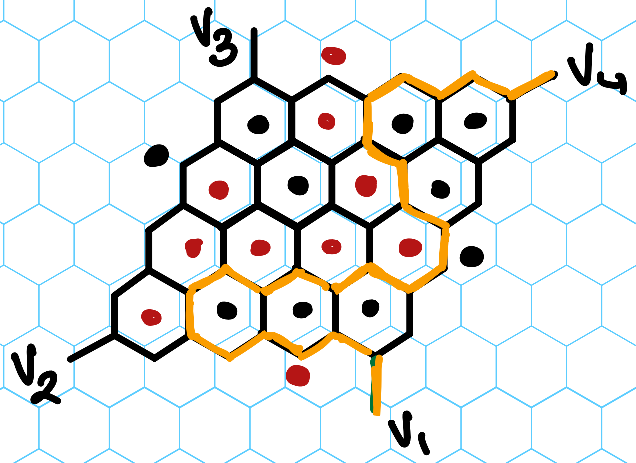
Allora vuol dire che




contraddizione!

Il percorso è quindi ben definito.

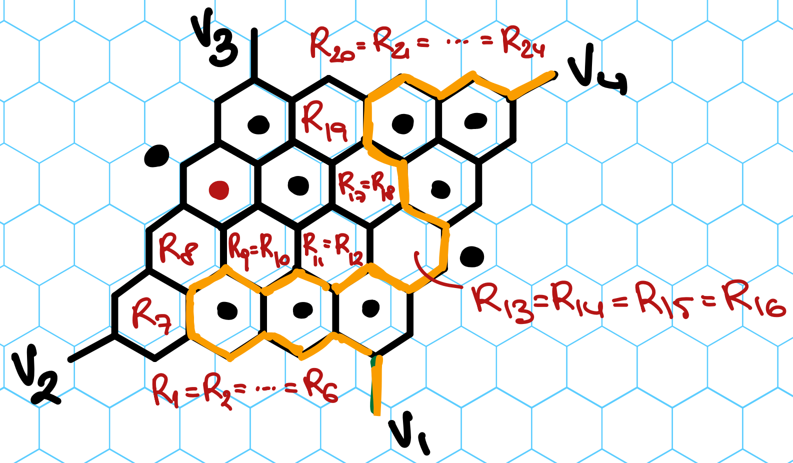
Vediamo che definisce un percorso vincente!




Numeriamo i lati: $V_1 = L_1, L_2 \dots L_N = V_4$

Il percorso è quindi ben definito.

Vediamo che definisce un percorso vincente!

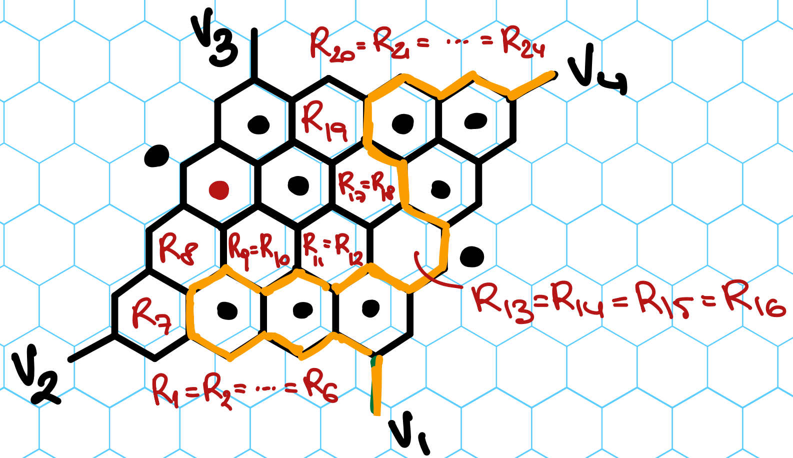



Numeriamo i lati : $V_1 = L_1 , L_2 \dots L_N = V_4$

Ogni lato identifica una casella rossa : $R_1, R_2 \dots R_N$
possibilmente con ripetizioni.

Il percorso è quindi ben definito.

Vediamo che definisce un percorso vincente!




Numeriamo i lati: $V_1 = L_1, L_2 \dots L_N = V_4$

Ogni lato identifica una casella rossa: $R_1, R_2 \dots R_N$
possibilmente con ripetizioni.

Cancellando le ripetizioni otteniamo un percorso vincente per il Rosso.

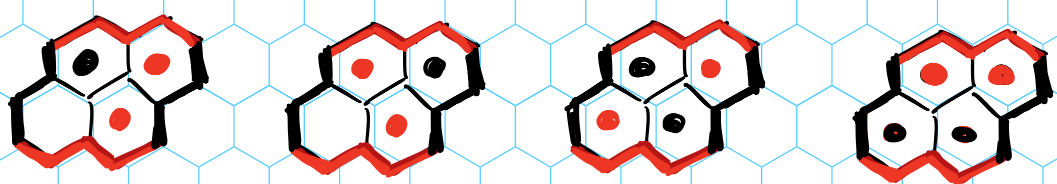
#

Non potendo finire in pareggio, allora un giocatore ha sempre una strategia vincente!

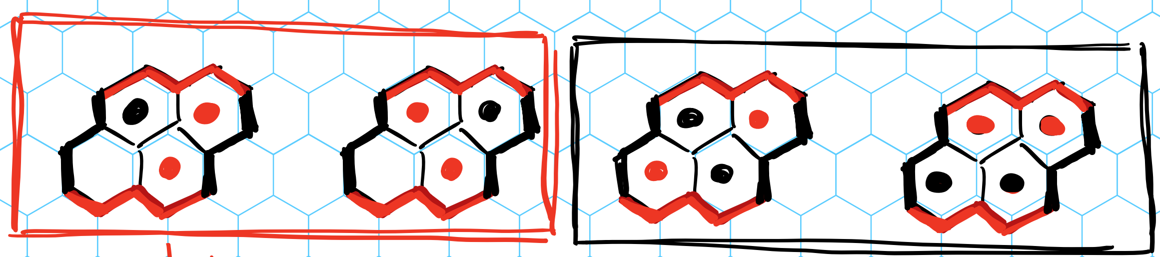
Questo è vero per ogni gioco tale che:

- deterministico: non ci sono dadi o componenti casuali
- finito: abbiamo un numero finito di configurazioni
- non c'è la mossa "nulla", il "passo turno"
- non si può tornare a una configurazione precedente
- c'è informazione perfetta: ogni giocatore conosce il risultato di ogni mossa dell'avversario
- non può finire in "patta".

Le configurazioni finali sono tutte Vincenti o Perdenti (per il Rosso)

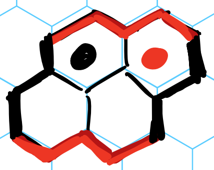


Le configurazioni finali sono tutte Vincenti o Perdenti (per il Rosso)



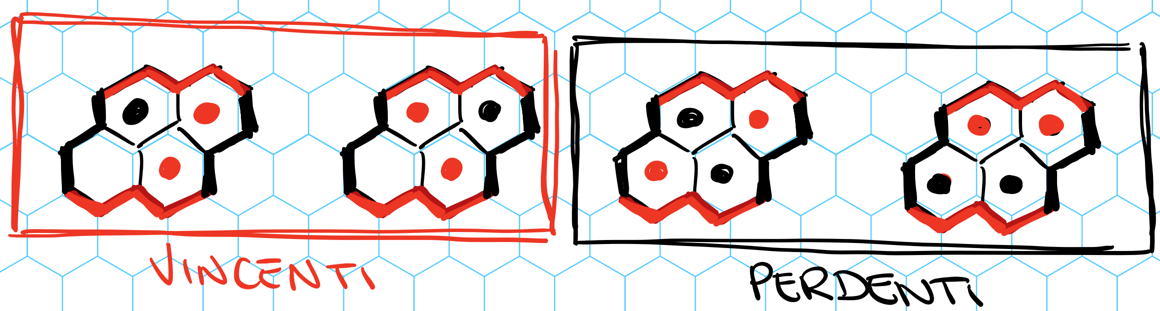
VINCENTI PERDENTI

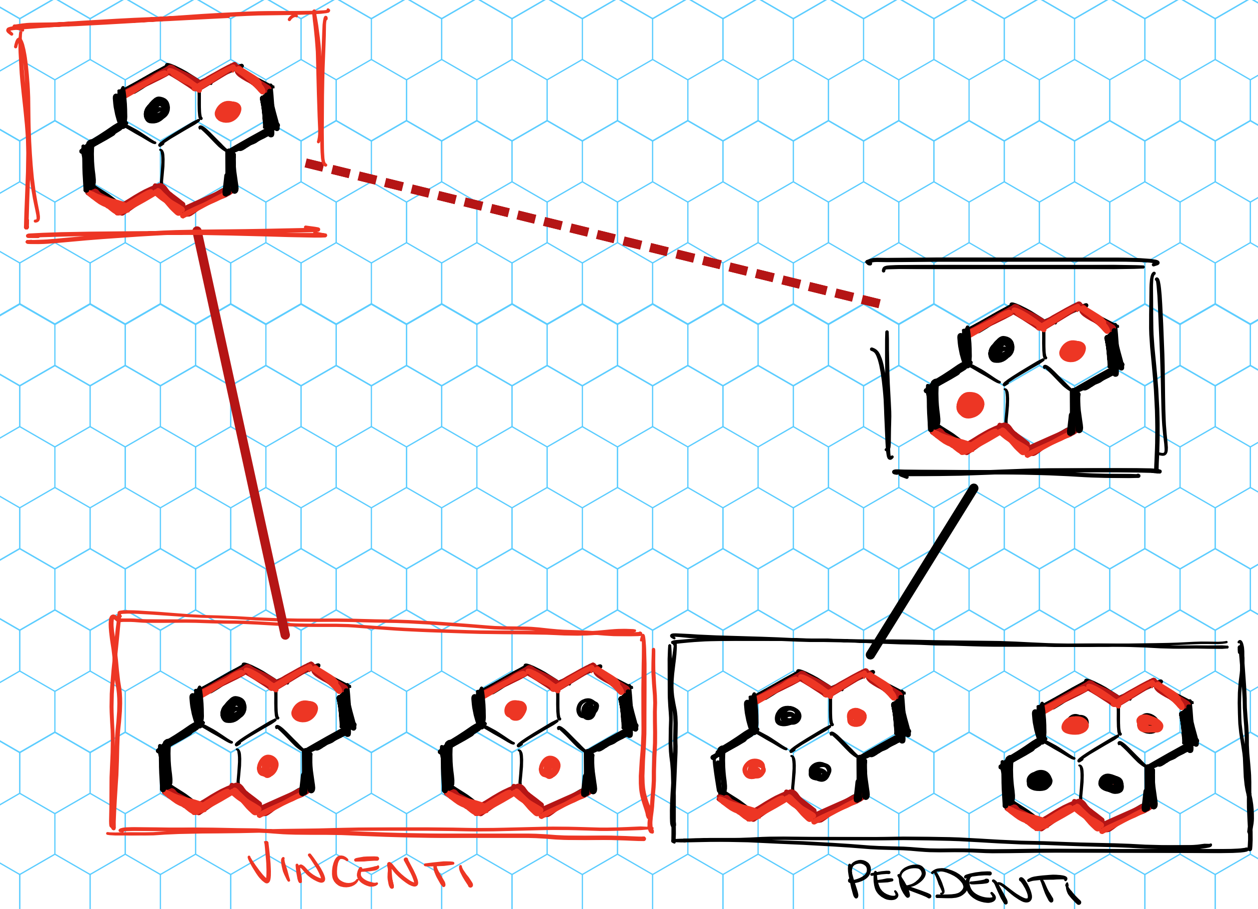
Ora etichettiamo tutte le configurazioni che hanno una mossa dall'essere finali



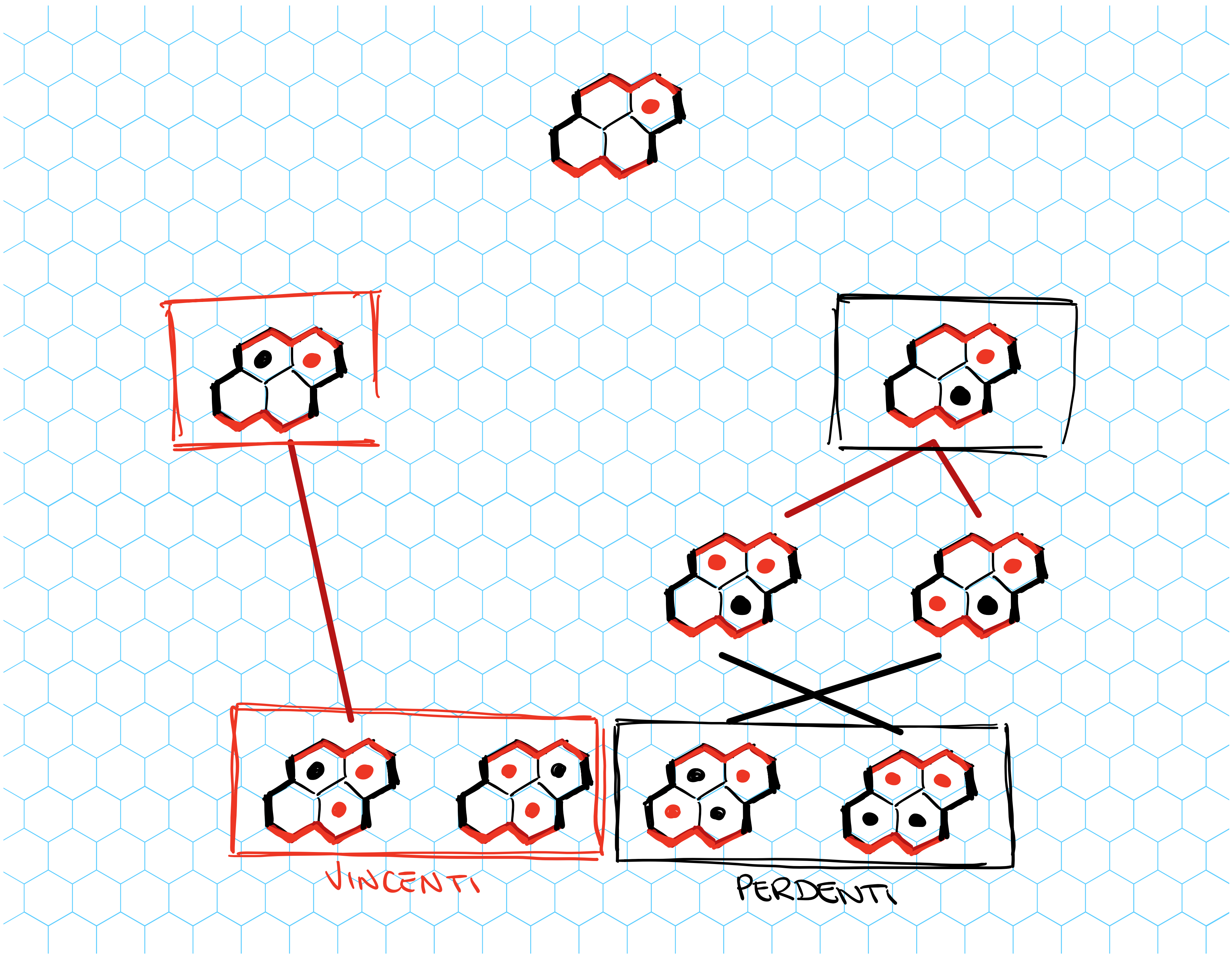
Tocca a Rosso:

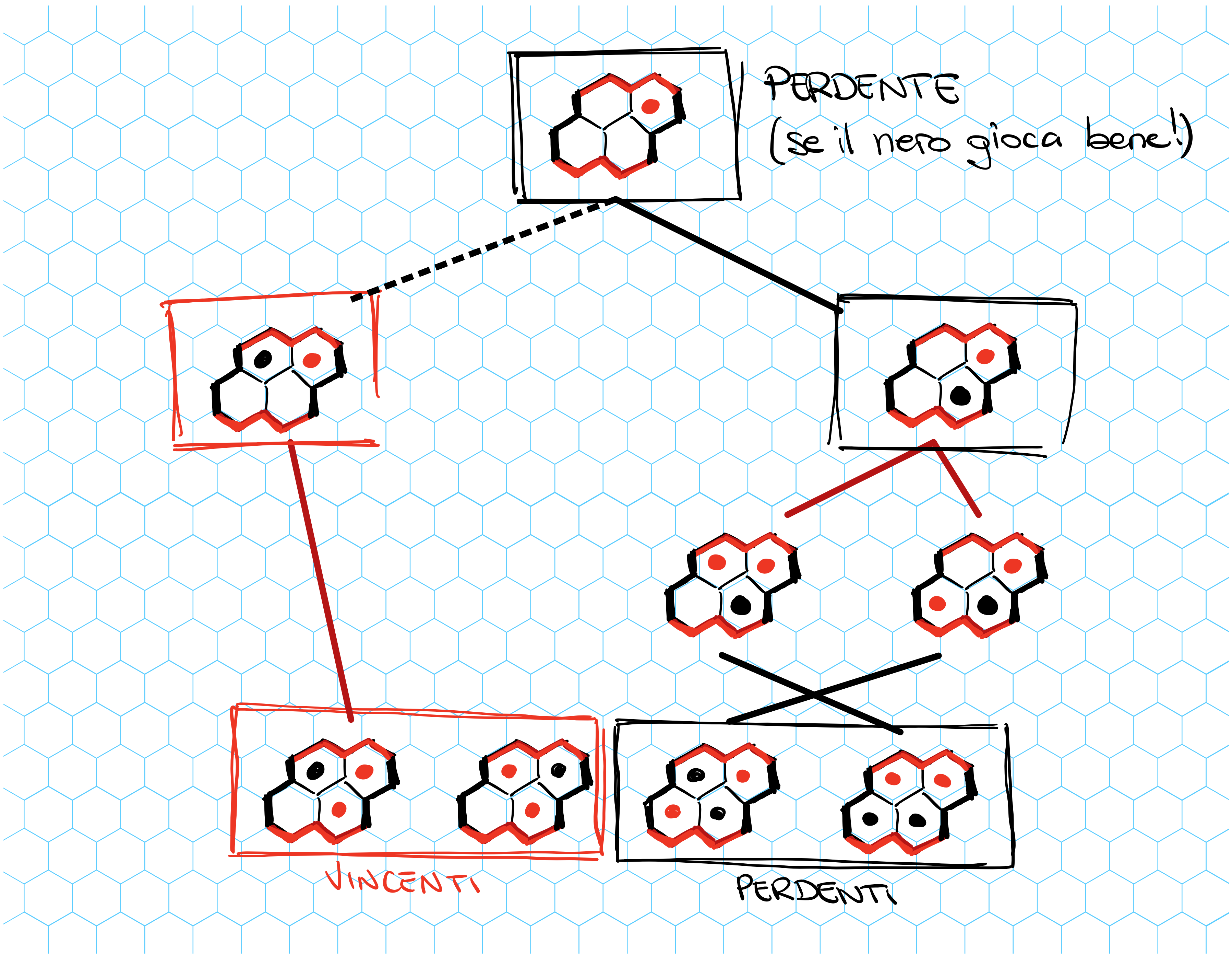
è una posizione vincente o perdente?





VINCENTI
PERDENTI


VINCENTI
PERDENTI


PERDENTE
(se il nero gioca bene!)
VINCENTI
PERDENTI

# UN PO' DI TOPOLOGIA

La TOPOLOGIA studia proprietà che sono
INVARIANTI PER DEFORMAZIONI CONTINUE
cioè, senza operare tagli o incollature

Due oggetti legati da trasformazioni continue
si dicono OMEOMORFI,
dal greco: "stessa forma"

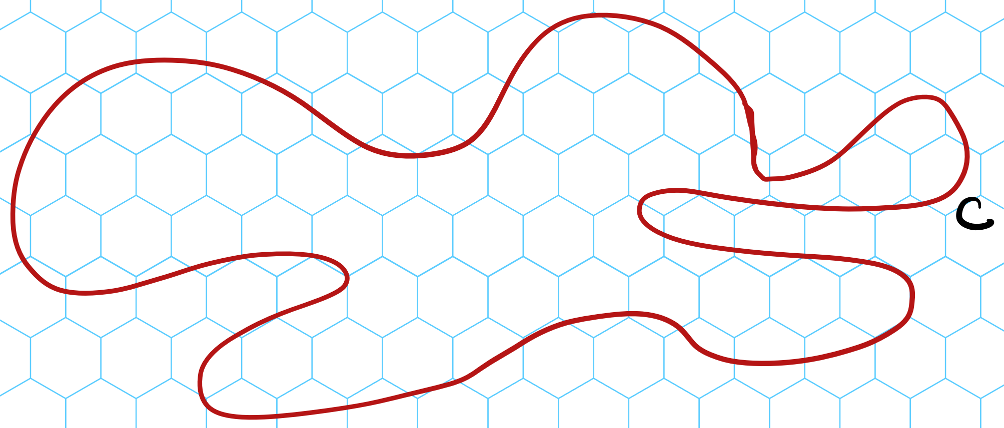
# Un po' di Topologia


Due oggetti legati da trasformazioni continue si dicono OMEOMORFI,

dal greco: "stessa forma"

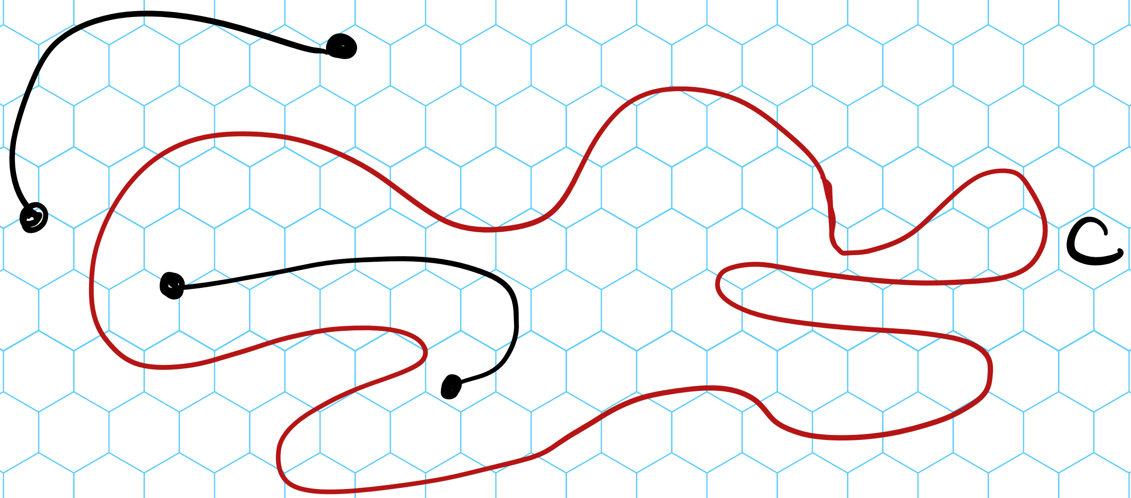
# TEOREMA DI JORDAN

Ogni curva piana chiusa e semplice $C$
divide il piano in due regioni:
una interna e una esterna.



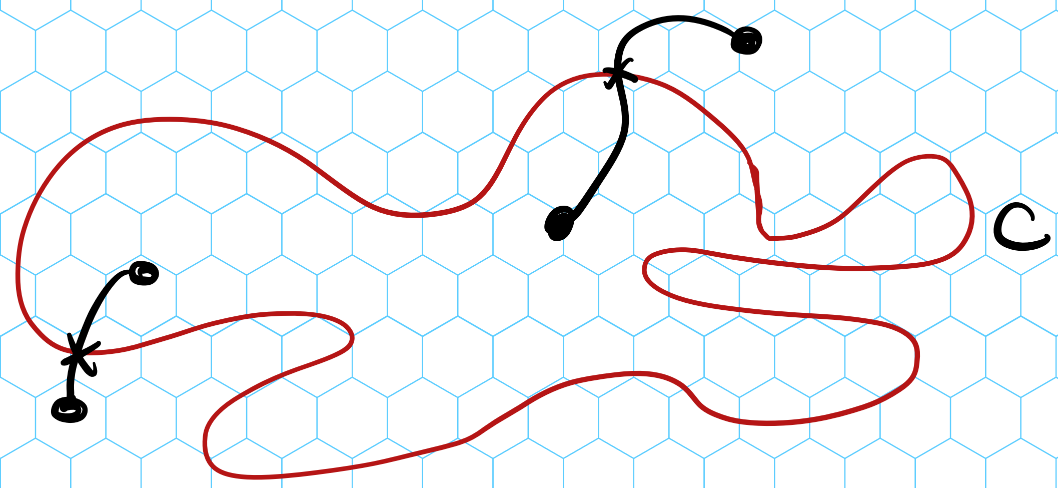
# TEOREMA DI JORDAN

Due punti entrambi interni o
entrambi esterni,
si possono sempre collegare da una curva
che non interseca C.



# TEOREMA DI JORDAN

Due punti uno interno e uno esterno si possono collegare solamente attraversando la curva C.



## Corollario

Una scacchiera dell'Hex può contenere un percorso vincente solo per UN giocatore